Strömung von nematischen Flüssigkristallen in Kapillaren mit rechteckigem Querschnitt

F. Schneider

Institut für Physikalische Chemie, Universität Siegen

Z. Naturforsch. **35a**, 1426–1428 (1980); eingegangen am 30. September 1980

The Flow of an Nematic Liquid Crystal in a Capillary with a Rectangular Cross Section

The velocity profile for the flow of an incompressible nematic liquid crystal in a capillary with a rectangular cross section is calculated. Equations for the determination of the different viscosity coefficients from the volume flow rate and the pressure difference are presented.

Zur Bestimmung der Viskositätskoeffizienten nematischer Flüssigkristalle werden vielfach Messungen des Druckabfalls bei der Strömung durch Kapillaren mit rechteckigem Querschnitt herangezogen [1–3]. In einer Kapillare entsprechend Abb. 1 lassen sich bei einer Strömung in x_2-Richtung für den Fall $a_3 \gg a_1$ die Viskositätskoeffizienten [4] η_1, η_2 bzw. η_3 messen, wenn der Direktor des Flüssigkristalls durch ein genügend starkes Magnetfeld in x_1-, x_2- bzw. x_3-Richtung festgehalten wird. Ein vierter Viskositätskoeffizient η_{12} läßt sich aus einer Messung bestimmen, bei der das Magnetfeld unter 45° in der x_1-, x_2-Ebene liegt

$$[\eta_{12} = 4\,\eta_{45} - 2(\eta_1 + \eta_2)] .$$

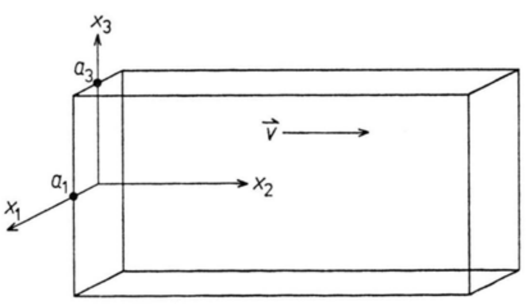

Abb. 1. Lage der Kapillare, die von den Flächen $x_1 = \pm a_1$ und $x_3 = \pm a_3$ begrenzt wird, in dem für die Berechnungen verwendeten Koordinatensystem.

Sonderdruckanforderungen an Dr. F. Schneider, Postfach 210209, D-59 Siegen 21.

Gilt die Beziehung $a_3 \gg a_1$ nicht, so stimmt der gemessene, effektive Viskositätskoeffizient nicht mit dem interessierenden Koeffizienten überein, sondern hängt auch von den anderen Koeffizienten ab. Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, das Strömungsprofil und die Volumengeschwindigkeit für diesen Fall zu berechnen und Korrekturformeln für die Berechnung der Viskositätskoeffizienten anzugeben.

Zur Berechnung der Strömungsprofile werden die von Leslie [5] und Ericksen [6] für nematische Flüssigkristalle angegebenen hydrodynamischen Grundgleichungen angewendet. Es wird angenommen, daß der Direktor durch die Wirkung des Magnetfeldes überall in die gleiche Richtung weist und daß die Abmessungen des Kapillarquerschnitts vernachlässigbar klein gegenüber der Kapillarlänge sind.

Fall 1: Direktor in x_1-Richtung

Die hydrodynamischen Grundgleichungen ergeben im stationären Fall für einen inkompressiblen nematischen Flüssigkristall

$$\eta_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \eta_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} = \frac{\partial p}{\partial x_2} . \tag{1}$$

Durch die Koordinatentransformation

$$x_1' = x_1 \left(\frac{\eta_3}{\eta_1}\right)^{1/4} ; \quad x_3' = x_3 \left(\frac{\eta_1}{\eta_3}\right)^{1/4} \tag{2}$$

die von van der Pauw [7] für den entsprechenden Fall der elektrischen Leitfähigkeit in anisotropen Medien angegeben wurde, geht die Bewegungsgleichung in die einer isotropen Flüssigkeit über. Der Kapillarquerschnitt wird dabei so verändert, daß bei der Strömung einer isotropen Flüssigkeit der Viskosität $(\eta_1 \eta_3)^{1/2}$ an äquivalenten Stellen gleiche Strömungsgeschwindigkeiten auftreten und durch äquivalente Flächen pro Zeiteinheit gleiche Volumina fließen. Die Transformation von Gl. (1) ergibt

$$(\eta_1 \eta_3)^{1/2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3'^2}\right) = \frac{\partial p}{\partial x_2} . \tag{3}$$

Mit der Randbedingung $v = 0$ an den Kapillarwänden hat die Differentialgleichung nach Rücktransformation die Lösung [8]

0340-4811 / 80 / 1200-1426 $ 01.00/0. — Please order a reprint rather than making your own copy.

$$v = \frac{\partial p/\partial x_2}{2\,\eta_1}\left\{x_1^2 - a_1^2 + \frac{4\,a_1^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+\frac{1}{2})^3}\,\frac{\cosh\left[m\,x_3\left(\frac{\eta_1}{\eta_3}\right)^{1/2}\right]}{\cosh\left[m\,a_3\left(\frac{\eta_1}{\eta_3}\right)^{1/2}\right]}\cos(m\,x_1)\right\} \quad \text{mit} \quad m = \frac{(n+\frac{1}{2})\,\pi}{a_1}. \tag{4}$$

Abbildung 2 zeigt die entsprechenden Strömungsprofile für verschiedene Viskositätsanisotropien. Der unterschiedliche Einfluß der schmalen Kapillarseite in Abhängigkeit von der Viskositätsanisotropie ist deutlich zu erkennen; für den normalerweise vorliegenden Fall $\eta_1 > \eta_3$ ergibt sich eine Vergrößerung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit gegenüber dem isotropen Fall.

Die Volumengeschwindigkeit $\dot{V}$ läßt sich nach van der Pauw [7] direkt unter Verwendung des geänderten Querschnitts oder aus Gl. (4) durch Integration gewinnen.

$$\dot{V} = -\frac{4\,a_1^3\,a_3}{3\,\eta_1}\,\frac{\partial p}{\partial x_2}\left\{1 - \frac{6\,a_1}{\pi^5\,a_3}\left(\frac{\eta_3}{\eta_1}\right)^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tanh\left[(n+\frac{1}{2})\,\pi\,\frac{a_3}{a_1}\left(\frac{\eta_1}{\eta_3}\right)^{1/2}\right]}{(n+\frac{1}{2})^5}\right\}. \tag{5}$$

Bei Eichung der Kapillare mit einer isotropen Flüssigkeit folgt daraus

$$\eta_1^{\text{eff}} = \eta_1\,\frac{F\left(\frac{a_3}{a_1}\right)}{F\left[\frac{a_3}{a_1}\left(\frac{\eta_1}{\eta_3}\right)^{1/2}\right]} \quad \text{mit} \quad F(s) = 1 - \frac{6}{s\,\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tanh[(n+\frac{1}{2})\,\pi\,s]}{(n+\frac{1}{2})^5}\,. \tag{6}$$

Das Verhältnis $\eta_1^{\text{eff}}/\eta_1$ ist in Abb. 3 in Abhängigkeit von der Querschnittsform für einige Anisotropieverhältnisse dargestellt. Der Unterschied zwischen η_1^{eff} und η_1 beträgt bei $\eta_1/\eta_3 = 4$ und $a_3/a_1 = 8$ etwa 4%. Bei großen Werten von s läßt sich die Summe

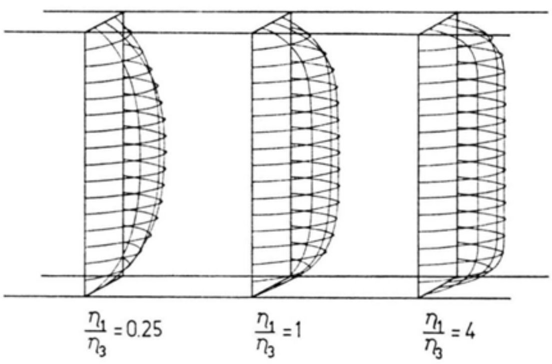

Abb. 2. Strömungsprofile in einer Kapillare mit dem Seitenverhältnis $a_3/a_1 = 4$ bei konstantem η_1 für verschiedene Anisotropieverhältnisse η_1/η_3.

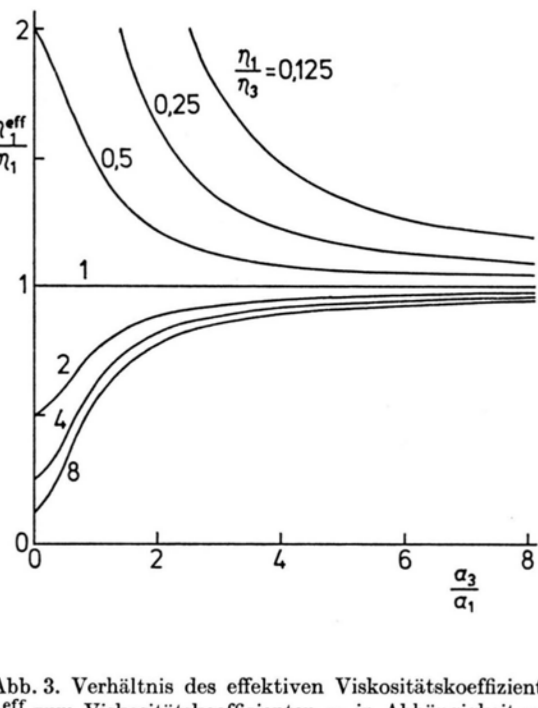

Abb. 3. Verhältnis des effektiven Viskositätskoeffizienten η_1^{eff} zum Viskositätskoeffizienten η_1 in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis a_3/a_1 der Kapillare für verschiedene Viskositätsanisotropien.

in Gl. (6) durch 32,14476 ersetzen.

$$\eta_1^{\text{eff}} = \eta_1 \frac{1 - 0{,}6302489 \dfrac{a_1}{a_3}}{1 - 0{,}6302489 \dfrac{a_1}{a_3} \left(\dfrac{\eta_3}{\eta_1}\right)^{1/2}}. \tag{7}$$

Die Anwendung von Gl. (7) ergibt bei der Berechnung von $\eta_1^{\text{eff}}/\eta_1$ z.B. für den Fall $\eta_1/\eta_3 = 4$ und $a_3/a_1 = 4$ nur eine Abweichung von 10^{-6} im Vergleich zur exakten Gleichung (6).

Fall 2: Direktor in x_2-Richtung

Die Bewegungsgleichung

$$\eta_2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_3{}^2}\right) = \frac{\partial p}{\partial x_2} \tag{8}$$

entspricht der Strömung einer isotropen Flüssigkeit mit dem Viskositätskoeffizienten η_2. Wird daher die Kapillare mit einer isotropen Flüssigkeit geeicht, so wird für den Flüssigkristall unabhängig vom Seitenverhältnis a_3/a_1 der Viskositätskoeffizient η_2 richtig bestimmt.

Fall 3: Direktor in x_3-Richtung

Die Gleichungen des Falls 1 lassen sich auch für diesen Fall anwenden, indem in den Gleichungen die Indizes 1 und 3 der Viskositätskoeffizienten miteinander vertauscht werden.

Fall 4: Direktor unter 45° in der x_1, x_2-Ebene

Die hydrodynamischen Grundgleichungen ergeben

$$\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} + \frac{\eta_{12}}{4}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1{}^2} + \frac{\eta_2 + \eta_3}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_3{}^2} = \frac{\partial p}{\partial x_2}. \tag{9}$$

Es lassen sich auch hier die Gleichungen des Falls 1 anwenden, in denen dann η_1 durch $((\eta_1 + \eta_2)/2 + \eta_{12}/4)$ und η_3 durch $(\eta_2 + \eta_3)/2$ zu ersetzen sind.

Die Auflösung des Gleichungssystems aus der Gl. (7) und der analogen Gleichung für die η_3-Messung nach η_1 und η_3 führt zu sehr unhandlichen Ausdrücken. Die Berechnung der Viskositätskoeffizienten aus den effektiven Viskositätskoeffizienten wird daher am einfachsten iterativ ausgeführt, indem im Korrekturterm für das Viskositätsverhältnis zuerst das effektive Verhältnis und dann die korrigierten Verhältnisse benutzt werden.

[1] G. M. Michailoff und W. N. Zwetkoff, Acta Physicochim. URSS **10**, 775 (1939).
[2] Ch. Gähwiller, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **20**, 301 (1973).
[3] H. Kneppe und F. Schneider, Mol. Cryst. Liq. Cryst., im Druck.
[4] W. Helfrich, J. Chem. Phys. **51**, 4092 (1969).
[5] F. M. Leslie, Arch. Ratl. Mech. Anal. **28**, 265 (1968).
[6] J. L. Ericksen, Mol. Cryst. Liq. Cryst. **7**, 153 (1969).
[7] L. J. van der Pauw, Philips Res. Rep. **16**, 187 (1961).
[8] R. Berker, Handbuch der Physik, Band 8/2, Herausgeber S. Flügge, Springer Verlag, Berlin 1963.